УДК 517.392
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов

И. В. Бойков[1], П. В. Айкашев[2]

[1,2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
[1]boikov@pnzgu.ru, [2]math@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Гиперсингулярные интегралы в настоящее время находят все больше областей применения – аэродинамика, теория упругости, электродинамика и геофизика. При этом их вычисление в аналитическом виде возможно лишь в весьма частных случаях. Поэтому приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов являются актуальной задачей вычислительной математики. Этой задаче посвящено много работ. Еще большее число работ посвящено приближенным методам вычисления сингулярных интегралов. Исследования приближенных методов вычисления сингулярных интегралов начаты значительно раньше, чем аналогичные исследования гиперсингулярных интегралов. И в этом направлении получены результаты, не имеющие аналогов для гиперсингулярных интегралов. Представляет значительный интерес распространение методов вычисления сингулярных интегралов на гиперсингулярные интегралы, основанное на связи между некоторыми классами сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Этой задаче посвящена данная работа. *Материалы и методы.* Построение квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов основано на методах конструктивной теории функций и теории сингулярных и гиперсингулярных интегралов. *Результаты.* Предложен метод построения квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов, основанный на трансформации квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов. Построены квадратурные формулы вычисления нескольких классов гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегралов. Получены оценки погрешности построенных квадратурных формул. *Выводы.* Построенные методы позволяют эффективно вычислять гиперсингулярные интегралы при решении прикладных задач.

Ключевые слова: квадратурные формулы, кубатурные формулы, гиперсингулярные интегралы

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00594) и «Ректорского гранта» Пензенского государственного университета (договор № 1/РГ от 08.04.2020).

Для цитирования: Бойков И. В., Айкашев П. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 66–84. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Approximate methods for calculating hypersingular integrals

I.V. Boykov[1], P.V. Aykashev[2]

[1,2]Penza State University, Penza, Russia

[1]boikov@pnzgu.ru, [2]math@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* Hypersingular integrals are now finding more and more fields of application – aerodynamics, elasticity theory, electrodynamics and geophysics. Moreover, their calculation in an analytical form is possible only in very special cases. Therefore, approximate methods for calculating hypersingular integrals are an urgent problem in computational mathematics. Many works have been devoted to this problem. An even greater number of works are devoted to approximate methods for calculating singular integrals. Studies of approximate methods for calculating singular integrals began much earlier than similar studies of hypersingular integrals. In this direction, results have been obtained that have no analogues for hypersingular integrals. This work is devoted to considerable interest to extend the methods for calculating singular integrals to hypersingular integrals, based on the connection between some classes of singular and hypersingular integrals. *Materials and methods.* The construction of quadrature formulas for calculating hypersingular integrals is based on the methods of the constructive theory of functions and the theory of singular and hypersingular integrals. *Results.* A method is proposed for constructing quadrature formulas for calculating hypersingular integrals, based on the transformation of quadrature formulas for calculating singular integrals. Quadrature formulas for calculating several classes of hypersingular and polyhypersingular integrals are constructed. The estimates of the error of the constructed quadrature formulas are obtained. *Conclusions.* The constructed methods make it possible to efficiently calculate hypersingular integrals when solving applied problems.

Keywords: quadrature formulas, cubature formulas, hypersingular integrals

Acknowledgments: the work is supported by the RFBR (grant 16-01-00594) and “Rector’s grant” of Penza State University (contract No 1/RG from April 8, 2020).

For citation: Boykov I.V., Aykashev P.V. Approximate methods for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1(57):66–84. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Начиная с середины прошлого века методы сингулярных, а затем и гиперсингулярных, интегральных уравнений находят все большее применение при исследовании и моделировании различных проблем в физике, естествознании и технологиях: в аэродинамике, электродинамике, теории упругости, ядерной и атомной физике, геофизике, математической физике. Аналитические методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений известны только для очень частных случаев. Поэтому основным математическим аппаратом при решении сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений являются численные методы. Для реализации численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений необходимы эффективные приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

В свою очередь сингулярные и гиперсингулярные интегралы в аналитическом виде вычисляются в очень редких случаях. Это обусловливает необходимость развития численных методов вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

В настоящее время методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов можно разделить на два направления: вычисление интегралов с фиксированными особенностями и вычисление интегралов с нефиксированными (переменными) особенностями.

В свою очередь во втором направлении выделяются методы построения квадратурных формул типа Гаусса.

Вопросам вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов посвящено большое число работ, обзоры которых представлены в монографиях [1–6] и в статьях [7–21].

Данная работа посвящена методам трансформирования квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов (СИ) в квадратурные формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов (ГИ).

Статья построена следующим образом. В разд. 1 описаны классы функций, используемые в работе. В разд. 2 приведены определения ГИ. В разд. 3 даны определения оптимальных методов вычисления ГИ. В разд. 4 дан краткий обзор работ, посвященных приближенным методам вычисления ГИ. Раздел 5 посвящен построению квадратурных формул вычисления ГИ, полученных трансформациями квадратурных формул вычисления СИ.

1. Классы функций

Пусть γ – единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной. Пусть $A=[a,b]$ или $A=\gamma$.

Определение 1.1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M;A)$ $(0<\alpha\le 1)$ состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству

$$|f(x')-f(x'')|\le M\,|x'-x''|^\alpha .$$

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M;A)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 1.2. Класс $W^r(M;A)$ состоит из функций, заданных на A, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)|\le M$.

Определение 1.3. Класс $W^rH_\alpha(M;A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M;A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x)\in H_\alpha(M)$.

Пусть $A=[a,b]$ или $A=\gamma$. Пусть $f(x)$ – функция, определенная на A. Через $H(f,\alpha)$, $0<\alpha\le 1$, обозначен функционал

$$H(f,\alpha)=\sup_{x_1\ne x_2,\,x_1,x_2\in A}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}.$$

Пусть $L=\gamma_1\times\gamma_2,\gamma_i=\{z_i\in Z_i:|z_i|=1\},i=1,2,$ где Z_i – плоскость комплексной переменной, $i=1,2$. Пусть $D=[a_1,b_1;a_2,b_2]$ или $D=L.$

Определение 1.4. Через $H_{\alpha_1\alpha_2}(M,D)$ обозначен класс определенных на D функций $f(x,y)$ таких, что для любых точек (x',y') и (x'',y'') из D $|f(x',y')-f(x'',y'')|\le M_1|x'-x''|^{\alpha_1}+M_2|y'-y''|^{\alpha_2}$. Здесь $M=\max(M_1,M_2)$.

Определение 1.5. Через $W^{r_1,r_2}(M,D), 0<M<\infty$, обозначен класс определенных на D функций $f(x_1,x_2)$, имеющих частные производные $f^{(v_1,v_2)}(x_1,x_2)=\partial^{v_1+v_2}f(x_1,x_2)/\partial x_1^{v_1}\partial x_2^{v_2}$ $(0\le v_i\le r_i, i=1,2)$, причем

$$\left\|f^{(r_1,r_2)}(x_1,x_2)\right\|_{C(D)}\le M,\ \left\|f^{(r_1,j)}(x_1,0)\right\|_{C(D)}\le M,\quad j=0,1,\ldots,r_2-1,$$

$$\left\|f^{(i,r_2)}(0,x_2)\right\|_{C(D)}\le M,\ i=0,1,\ldots,r_1-1.$$

Определение 1.6. Через $W^{r_1,r_2}H_{\alpha_1,\alpha_2}(M,A,D)$, $0<M,A<\infty$, обозначен класс функций $f(x_1,x_2)\in W^{r_1,r_2}(M,D)$, частные производные которых $f^{(v_1,v_2)}(x_1,x_2)=\partial^{v_1+v_2}f(x_1,x_2)/\partial x_1^{v_1}\partial x_2^{v_2}$ $(0\le v_i\le r_i, i=1,2)$ удовлетворяют дополнительному условию Гельдера $H_{\alpha_1,\alpha_2}(A,D)$.

Определение 1.7. Через $\tilde{W}^r(M;(a,b)$ $(\tilde{W}_p^r(M;a,b))$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b-a)$, входящих в класс $W^r(M;a,b)$ $(W_p^r(a,b))$.

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Определение 2.1 [22, 23]. Интеграл вида $\int\limits_a^b \frac{A(\tau)d\tau}{(b-\tau)^{p+\alpha}}$ при натуральном p и вещественном α $(0<\alpha<1)$ определяет величину (конечную часть) рассматриваемого интеграла: как предел при $x\to b$ суммы $\int\limits_a^x \frac{A(\tau)d\tau}{(b-\tau)^{p+\alpha}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}$, если предположить, что функция $A(t)$ имеет p производных в окрестности точки b. Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x=b$.

Определение 2.2 [24]. Пусть $\varphi(t)\in W^{p-1}H_\alpha(M)$. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a<c<b, p=2,3,\ldots$, в смысле главного значения Коши – Адамара называется предел:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}=\lim_{v\to 0}\left[\int\limits_a^{c-v}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}+\int\limits_{c+v}^b\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}+\frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) функция $\xi(v)$ имеет непрерывную производную $(p-1)$-го порядка в окрестности нуля.

Определение 2.3. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\phi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v)\ln|v|\right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$-го порядка в окрестности нуля; $\xi_1(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

Рассмотрим интеграл

$$L\varphi \equiv \iint\limits_G \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где (t_1,t_2) – точка области G; p $(p>2)$ – натуральное число.

Пусть $R(t,\varepsilon)$, $t=(t_1,t_2)$, – круг с центром в точке t и с радиусом ε.

Определение 2.4 [3]. Регуляризацией интеграла $L\varphi$ при $p\geq 3$ называется предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{G\backslash R(t,\varepsilon)}\!\!\int \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - C(\varepsilon)\ln\varepsilon\right),$$

где $B(x)$, $C(x)$ – любые функции, на которые налагаются следующие условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет непрерывные производные до $(p-2)$-го порядка в окрестности нуля;

в) функция $C(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица.

Рассмотрим интеграл

$$H(f,\gamma) \equiv \iint\limits_{R_2} \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2, \tag{1}$$

где уравнение $\gamma(t_1,t_2)=0$ определяет функцию особенностей, а контур γ определяется уравнением $\gamma(t_1,t_2)=0$. Пусть ε – произвольное малое число.

Обозначим через Γ_ε область с границей Γ_ε, состоящую из точек, расстояние от которых до контура γ не превосходит ε в евклидовой метрике. Пусть каждая точка контура γ будет нулем r-го порядка функции $\gamma(t_1,t_2)=0$.

Определение 2.5 [19]. Конечной частью интеграла $H(f,\gamma)$ назовем предел

$$H(f,\gamma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{R_2\setminus\Gamma_\varepsilon}\int\frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)}dt_1dt_2-\frac{F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}}\right],$$

где $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ функция, удовлетворяющая двум условиям:

1) в области Γ_ε функция $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ имеет непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка;

2) предел существует.

Рассмотрим бигиперсингулярный интеграл

$$B\varphi=\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}},$$

где γ_i – замкнутый гладкий контур в плоскости комплексной переменной z_i, $i=1,2$.

Построим окружность с центром в точке t_1 столь малого радиуса ρ_1, что она пересекает контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1''. Часть контура γ_1, заключенного между точками t_1' и t_1'', обозначим через l_1.

Аналогичное построение проведем и на контуре γ_2, и часть контура γ_2, расположенного между точками t_2' и t_2'', обозначим через l_2.

Интеграл $B\varphi$ определяется выражением

$$B\varphi=\lim_{\rho_1\to 0,\rho_2\to 0}\left[\int\limits_{\gamma_1\setminus l_1}\int\limits_{\gamma_2\setminus l_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}-\frac{\Gamma(\rho_1,\rho_2)}{\rho_1^{p_1-1}\rho_2^{p_2-1}}\right],$$

где $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$ – функция, имеющая непрерывно дифференцируемые производные до (p_1-1)-го порядка по переменной ρ_1 и до (p_2-1)-го порядка по переменной ρ_2. Функция $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

Отметим, что в соответствии с принятым в работе способом определения гиперсингулярных интегралов для нахождения функции $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$ нужно вычислить по частям последний интеграл и из результата вычесть слагаемые, стремящиеся к бесконечности, когда $\rho_i\to 0$, $i=1,2$.

3. Постановка задачи построения оптимальной квадратурной формулы

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову и, в применении к ГИ, заключается в следующем [3].

Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p \text{ – целое, } a < t < b, \tag{2}$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\rho} \varphi^{(l)}(s_k) p_{kl}(t) + R_N\left(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi\right) \tag{3}$$

с узлами s_k и весами $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, ..., \rho$).

Под погрешностью квадратурной формулы (3) будем понимать величину $R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) = \sup_t |R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi)|$. Если Ψ – некоторый класс заданных на сегменте $[a,b]$ функций, то положим $R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi\in\Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|$. Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим функционал $\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi)$, в котором нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, \rho$). Квадратурную формулу (3), построенную на узлах s_k^* и весах $p_{kl}^*(t)$ $\left(k = 1, 2, \ldots, N\right)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $\dfrac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1$, $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1$, $R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right) \asymp \zeta_N[\Psi]$ соответственно.

Аналогичным образом определяются оптимальные кубатурные формулы для полигиперсингулярных интегралов.

4. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов

Приближенным методам вычисления ГИ посвящено большое число публикаций, частично представленных в [3].

Для вычисления ГИ с фиксированными особенностями вида

$$F\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} \text{ и } I\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau^p}$$

используются квадратурные формулы, основанные на различных подходах. Основной метод построения квадратурных формул для вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ заключается в замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ n-мерным аппаратом приближения: интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками ортогональных рядов и т.д. Достаточно подробная библиография, посвященная вычислению интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ содержится в [3,18, 25–27]. В работах [3, 18, 25] построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ на классах функций $W_p^r(1)$.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов $H\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}$ и

$G\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}$, $-1 < t < 1$, различными авторами [3, 6, 7, 9, 11, 13, 16–18, 26, 28–38] предложены и обоснованы различные квадратурные формулы, которые условно можно разделить на две большие группы: квадратурные формулы интерполяционного типа и квадратурные формулы типа Гаусса.

К первой группе (см. статьи [10, 18, 19, 25, 26, 33, 34]) относятся квадратурные формулы, основанные на замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками рядов по ортогональным функциям.

К этой группе также относятся квадратурные формулы, построенные методом дискретных вихрей [5, 6].

Ко второй группе (см. статьи [7–9, 12–14, 16, 17, 38]) относятся квадратурные формулы, являющиеся аналогами формул Гаусса для ГИ. Построение этих формул основано на представлении ГИ в виде

$$(G\varphi)(t) = \varphi(t)\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - t)^p} d\tau \tag{4}$$

и в применении к последнему интегралу квадратурных формул Гаусса.

Для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p = 2,3,4, \tag{5}$$

построены квадратурные формулы, основанные на различных технологиях. Обзор некоторых из них содержится в монографии [3], которая посвящена в основном построению оптимальных методов вычисления ГИ. Поэтому ряд технологий построения методов вычисления ГИ был опущен. Среди них в первую очередь необходимо отметить методы вычисления ГИ, основанные на свойствах ортогональных многочленов [28]. Эти методы возникли при построении численных алгоритмов решения гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) первого рода вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{(\tau - t)^2} + \frac{\alpha}{\tau - t} + h(t, \tau) \right] x(\tau)d\tau = f(t). \tag{6}$$

Решение уравнения (6) при гладкой правой части имеет вид $x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2}\psi(t)$, или $x(t) = ((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2}\psi(t)$, где $\psi(t)$ – гладкая функция.

Поэтому естествено искать решение уравнения (6) в виде функций

$$x_n(t) = (1-t^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{n} U_k(t),$$

$$x_n(t) = (1-t^2)^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} T_k(t),$$

или

$$x(t) = \left(\frac{(1-t)}{(1+t)}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{n} S_k(t),$$

где $T_k(t),\ U_k(t),\ S_k(t),\ k = 0,1,\ldots,n,$ – полиномы Чебышева первого, второго и третьего рода соответственно.

Методы вычисления гиперсингулярных интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} \tag{7}$$

при $p = 2$ на классах весовых функций $\omega(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}$, или $\omega(t) = ((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}$, представлены в работах [28, 35, 39].

Если правая часть в уравнении (6) является кусочно-постоянной функцией или имеет особенности (интегрируемые или неинтегрируемые по Риману), то классы функций, к которым принадлежат решения таких уравнений, в настоящее время неизвестны. Поэтому возникает необходимость в построении методов вычисления гиперсингулярных интегралов в общем случае, когда единственное условие, налагаемое на интегрируемую функцию, заключается в том, что рассматриваемый интеграл существует.

В работах [20, 21] построены квадратурные формулы вычисления ГU вида с весовой функцией $\omega(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},\ (\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta) \ge 0$.

В работе [40] построены квадратурные формулы вычисления ГИ (5), основанные на аппроксимации подынтегральной функции интерполяционными полиномами Лагранжа – Эрмита. Построены ненасыщаемые квадратурные формулы.

В работе [35] рассматриваются интегралы

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{m-1/2} T_n(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p},\quad \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{m-1/2} U_n(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p},\quad p = 2,3,4,\ m > 3, \tag{8}$$

где $U_n(t), T_n(t)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода; $m \ge 0$.

Один из приемов, используемых при вычислении гиперсингулярных интегралов, заключается [7] в понижении порядка особенностей:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{p+1}} = \frac{1}{p} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p}\right) d\tau = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}. \tag{9}$$

Этот прием использовался во многих последующих работах [12, 35].

Построение фундаментальных решений систем уравнений, моделирующих многослойные пластины, приводит [19] к новому классу гиперсингулярных интегралов, введенных выше определением 1.5.

В отличие от известных видов ГИ, имеющих особенности в отдельных точках или на топологическом произведении прямых, множество особых точек интеграла (2.1) в общем случае представляет собой кривые, которые могут иметь точки самопересечения. Эти кривые определяются уравнением $\gamma(t_1,t_2)=0$, имеющим нули до r-го порядка.

Кубатурные формулы вычисления интеграла (1) построены в [27, 33]. В работе [41] предложен аналитический метод вычисления ГИ различных видов, в том числе интегралов вида (1). Показано, что для вычисления ГИ на ряде классов функций можно построить формулы, аналогичные формуле Ньютона – Лейбница для определенных интегралов. Там же построен аналитико-численный метод вычисления многомерных ГИ, в котором по одной переменной применяется аналитический метод, а по остальным – численный.

В работе [42] построены квадратурные формулы вычисления преобразования Адамара

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_n(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+R_n(\varphi),\quad -\infty<t<\infty,$$

где

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\varphi(t_k)\psi_k(t),\ \ \psi_k(t)=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{n}c_l(t)c_l(t_k)+s_l(t)s_l(t_k)\right),$$

$$t_k=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1},\quad k=-n,\ldots,n,\ \ c_l(t)=\cos(2l\operatorname{arctg}t),\ \ s_l(t)=\sin(2l\operatorname{arctg}t).$$

Эта квадратурная формула используются при построении методов коллокации и механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси [43].

В последние десятилетия опубликовано большое число работ, посвященных распространению классических квадратурных формул вычисления определенных интегралов на гиперсингулярные интегралы. В частности, методу Гаусса посвящены работы [16, 30], методу Ньютона – Котеса – работы [31, 44], методу сигмоидальной трансформации – статья [32].

В работе [36] предложена следующая квадратурная формула Гаусса:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(\tau)}{(\tau-t)^2}g(\tau)d\tau\cong\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1-\tau_i^2\right)}{n+1}\frac{g(\tau_i)}{\left(\tau_i-t_j\right)^2}-(n+1)g\left(t_j\right),\ j=1,2,\ldots,n+1,\quad (10)$$

где $w(\tau)=\sqrt{1-\tau^2}$, $\tau_i=\cos\dfrac{i\pi}{n+1}$, $t_j=\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2(n+1)}$, $i=1,2,\ldots,n;$ $j=1,2,\ldots n+1.$

Здесь узлы τ_i $\left(i=1,2,...,n\right)$ и t_j $\left(j=1,2,...n+1\right)$ являются соответственно узлами полиномов Чебышева первого и второго рода.

Эта формула справедлива на дискретном множестве точек t_j, $j=0,1,2,...,n+1$.

В работе [37] предложено обобщение формулы (10):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)g(t)}{(t-x)^2}dt \cong \sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i^2}{(n+1)(t_i-x)^2}\left(1-\frac{T_{n+1}(x)}{T_{n+1}(t_i)}\right)-(n+1)g(x).$$

Одним из эффективных методов вычисления ГИ является метод интерполяционных квадратур Гаусса – Якоби. В работе [36] предложена методология построения интерполяционных квадратур Гаусса – Якоби, единая для интегралов в смысле Римана, сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Квадратурная формула Симпсона для ГИ с особенностью второго порядка исследуется в [44]. Точность стандартной квадратурной формулы Симпсона применительно к ГИ с особенностью второго порядка равна $O(h)$, где h – максимальное расстояние между узлами квадратурной формулы. В работе [45] построена модификация квадратурной формулы Симпсона, точность которой при совпадении особой точки с узлами квадратурной формулы на порядок выше. Авторы назвали такой эффект сверхсходимостью.

В работе [46] метод Эйлера – Маклорена распространен на ГИ следующих видов:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^{p+1}}d\tau,\ \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{|\tau-t)|^{p+1}}d\tau.$$

5. Об одном приеме построения квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов

Определение ГИ по формуле (9) удобно при построении и оценке погрешности квадратурных формул, инициированных квадратурными формулами вычисления СИ.

Ряд задач аэродинамики моделируется ГИУ вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{x(\sigma)}{\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma=f(s). \tag{11}$$

В работе [47] для решения этого уравнения используется метод дискретных вихрей. В работе [48] для вычисления интеграла (11) построена квадратурная формула интерполяционного вида.

Продемонстрируем на примере интеграла (11) применение формулы (9). Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{x(\sigma)}{2\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma=\frac{d}{ds}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}x(\sigma)\frac{\sigma-s}{2}d\sigma.$$

Приближенному вычислению интеграла $\tilde{x}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$ посвящено большое число работ [1, 48, 49].

Приведем следующую квадратурную формулу [1]:

$$\tilde{x}(s)=-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}x_k\sin(n+1)\frac{(s_k-s)}{2}\sin n\frac{(s_k-s)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(s_k-s)}{2}+R_n(x), \quad (12)$$

$$x_k=x(s_k),\ \ s_k=2k\pi/(2n+1),$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x(\sigma)}{2\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma=\frac{n+1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}x_k\cos(n+1)\frac{(s_k-s)}{2}\sin n\frac{(s_k-s)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(s_k-s)}{2}+$$

$$+\frac{n}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}x_k\sin(n+1)\frac{(s_k-s)}{2}\cos n\frac{(s_k-s)}{2}\frac{(s_k-s)}{2}-\frac{1}{2n+1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{2n}x_k\sin(n+1)\frac{(s_k-s)}{2}\sin n\frac{(s_k-s)}{2}\cos\frac{(s_k-s)}{2}\left(\operatorname{cosec}\frac{(s_k-s)}{2}\right)^2+R_n^*(x). \quad (13)$$

Погрешность квадратурной формулы (12) на классе функций $W^rH_\alpha(M),\ 0<\alpha\le 1,$ оценивается неравенством $\|R_n(x)\|\le C\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}$.

В работе [50] показано, что если при $n\ge N$ выполняется неравенство

$$\|f(s)-P_n(s)\|_{C([0,2\pi])}\le C\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}},$$

где $P_n(s)$ – полином степени n, то

$$\|f'(s)-(P_n(s))'\|_{C([0,2\pi])}\le C\frac{\ln n}{n^{r-1+\alpha}}.$$

Следовательно, $|R_n^*(x)|\le C\frac{\ln n}{n^{r-1+\alpha}}$.

Отметим, что построенная квадратурная формула позволяет совмещать узлы коллокации и узлы квадратурной формулы при построении вычислительной системы для уравнения (11).

Квадратурные формулы (12), (13) не оптимальные. Оптимальные по порядку формулы построены в [3], но они требуют «обхода» особой точки.

Воспользовавшись формулой Пуанкаре, имеем

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}=\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}=$$

$$=\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}x(e^{i\sigma})\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=\frac{(-1)^p}{(p-1)!i^pe^{i(p-1)s}}\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}\frac{2}{2n+1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{2n}\tilde{x}_k\sin(n+1)\frac{(s_k-s)}{2}\sin n\frac{(s_k-s)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(s_k-s)}{2}+R_n^{**}(x),\qquad(14)$$

где $\tilde{x}_k=x(e^{is_k}),\ k=0,1,\ldots,2n.$

Погрешность этой формулы на классе $W^sH_\alpha(M),\ 0<\alpha\le 1,$ оценивается неравенством $|R_n^{**}(W^sH_\alpha(M))|\le Cn^{-s-p+1}\ln n.$

Аналогичным образом строятся кубатурные формулы для вычисления полисингулярных интегралов вида

$$\int\limits_{\gamma_1}\cdots\int\limits_{\gamma_l}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\ldots\tau_l}{(\tau_1-t_1)^{p_1}\ldots(\tau_l-t_l)^{p_l}},$$

где $\gamma_i, i=1,2,\ldots,l,$ – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной $z_i, i=1,2,\ldots,l.$

Остановимся на случае, когда $p_i=2,\ i=1,2,...,l.$

Ограничимся рассмотрением интеграла с ядром Гильберта:

$$\Gamma\varphi=\frac{1}{(2\pi)^l}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\sigma_1,...,\sigma_l)d\sigma_1...d\sigma_l}{2^l\sin^2\frac{\sigma_1-s_1}{2}...\sin^2\frac{\sigma_l-s_l}{2}}.$$

Интеграл $\Gamma\varphi$ можно записать в виде

$$\Gamma\varphi=\frac{1}{(2\pi)^l}\frac{\partial}{\partial s_1}...\frac{\partial}{\partial s_l}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,...,\sigma_l)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}...\operatorname{ctg}\frac{\sigma_l-s_l}{2}d\sigma_1...d\sigma_l.$$

Аппроксимируем функцию $\varphi(s_1,...,s_l)$ интерполяционными полиномами

$$\varphi_{n....n}(s_1,s_2,...,s_l)=P_{n...n}(\varphi;s_1,s_2,...,s_l)=$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\cdots\sum_{k_l=0}^{2n}\varphi\left(s_{k_1},s_{k_2},...,s_{k_l}\right)\psi_{k_1}(s_1)\cdots\psi_{k_l}(s_l).$$

В результате приходим к кубатурной формуле

$$\Gamma\varphi=(-1)^l\left(\frac{2}{2n+1}\right)^l\sum_{k_1=0}^{2n}\sum_{k_2=0}^{2n}\cdots\sum_{k_l=0}^{2n}\varphi\left(s_{k_1},s_{k_2},...,s_{k_l}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{v=1}^{n}v\cos v\left(s_1-s_{k_1}\right)\right)\cdots\left(\sum_{v=1}^{n}v\cos v\left(s_l-s_{k_1}\right)\right)+R_{n...n}^{**}(\varphi).\qquad(15)$$

Для оценки погрешности $R^{**}_{n...n}(\varphi)$ кубатурной формулы (15) воспользуемся оценкой погрешности кубатурной формулы следующего вида:

$$\frac{1}{(2\pi)^l}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,...,\sigma_l)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\cdots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_l-s_l}{2}d\sigma_1...d\sigma_l=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^l}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\varphi_{n....n}(\sigma_1,...,\sigma_l)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\cdots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_l-s_l}{2}d\sigma_1\cdots d\sigma_l+R_{n...n}(\varphi).$$

Известно [3], что $\left|R_{n...n}\left[W^{r,...,r}H_{\alpha,...,\alpha}\right]\right|\le C\frac{\ln^l n}{n^{r+\alpha}}$.

Воспользовавшись этим неравенством и распространяя на многомерный случай известные [50] оценки $\left\|\frac{d}{dx}(f(x)-T_n(x))\right\|$, приходим к неравенству

$$\left\|R^{**}_{n...n}\left(W^{r\cdots r}H_{\alpha,\cdots,\alpha}(M)\right)\right\|\le C\frac{\ln^l n}{n^{r+\alpha-1}}.$$

Список литературы

1. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев : Наукова думка, 1968. 288 с.
2. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. 360 с.
3. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. 250 с.
4. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : ЮМИ, 2011.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
6. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М. : Янус-К, 2001. 508 с.
7. Kutt H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration // Numerical Mathematics. 1975. Vol. 24. P. 205–210.
8. Paget D. F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals // Numerical Mathematics. 1981. Vol. 36. P. 447–453.
9. Ioakimidis M. I. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-type integrals // Anal. Numer. Theor. Approx. 1983. Vol. 12. P. 131–140.
10. Bialecki B. A sine quadrature rule for Hadamard finite-part integrals // Numerical Mathematics. 1990. Vol. 57. P. 263–269.
11. Lutz E., Gray L. J., Ingraffea A. R. An overview of integration methods for hypersingular integrals // Boundary Elements. 1991. Vol. 13. P. 913–925.
12. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives // Numer. Math. 1987. Vol. 50. P. 273–281.
13. Monegato G. Numerical evaluation of hypersigular integrals // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. Vol. 50. P. 9–31.

14. Monegato G. The numerical evaluation of 2-D Caucty principal value integral arising in boundary integral equation methods // Math. Comp. 1994. Vol. 64. P. 765–777.
15. Diethelm K. Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic propertics and error estimates // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1995. Vol. 65. P. 97–114.
16. Crisculo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard-type finite integrals // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1997. Vol. 78. P. 255–275.
17. Korsunsky A. M. Gauss-Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals // Quart. Appl. Math. 1998. Vol. 56. P. 461–472.
18. Boykov I. V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals // J. Math. Math. Sci. 2001. Vol. 28. P. 127–179.
19. Boykov I. V., Boykova A. I., Ventsel E. S. Fundamental solutions for thick sandwich plates // Engineering Analisis and Boundary Elements. 2004. Vol. 28. P. 1437–1444.
20. Саакян А. В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур // Известия Национальной Академии Наук Армении. Механика. 2020. Т. 73, № 2. С. 44–57.
21. Саакян А. В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. № 2. С. 94–100.
22. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New Haven : Yale Univ. Press., 1923.
23. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М. : Наука, 1978. 351 с.
24. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Ученые записки Казанского государственного университета. 1953. Т. 113, кн. 10. С. 57–105.
25. Бойков И. В., Добрынина Н. Ф., Домнин Л. Н. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПензГТУ, 1996. 188 с.
26. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals // Computers and Mathematics with Applications. 2001. Vol 41. P. 327–352.
27. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals // Applied Numerical. 2009. Vol. 59, № 6. P. 1366–1385.
28. Kaya A. C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels // Quatery of applied mathematics. 1987. Vol. 45, № 1. P. 105–122.
29. Linkov A. M., Mogilevskaya S. G. Finite part integrals in problems of three-dimensional cracks // Prikl. Mat. Mekh. 1986. Vol. 50. P. 844–850.
30. Hui C. Y., Shia D. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1999. Vol. 44. P. 205–214.
31. Du Q. K. Evaluations of certain hypersingular integrals on interval // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 2001. Vol. 51. P. 1195–1210.
32. Choi U. J., Kim S. W., Yun B. Improvement of the asymptotic behaviour of the Euler–Maclaurin formula for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 2004. Vol. 61. P. 496–513.
33. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations // Anal. Boundary Elements. 2006. Vol. 30. P. 799–807.
34. Hildenbrand J., Kuhn G. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor // Anal. Boundary Elements. 1992. Vol. 10. P. 209–217.
35. Chan Y.-S., Fannjiang A., Paulino G. H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41. P. 683–720.

36. Korsunsky A. M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics // Procceding of the Royal Society. A. Mathematical, physical and engineering sciences. 2002. Vol. 458. P. 2721–2733.
37. Kazuhiro O., Nao-Aki N. An Iterative Algorithm of Hypersingular Integral Equations for Crack Problems N // Key Engineering Materials. Vols. 2008. P. 793–796.
38. Obaiys S. J., Ibrahim. R. W., Ahmad A. F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: FundamentalReview Study // Differential and Integral Inequalities. Ed.: Dorin Andrica Themistocles. M. : Rassias. Springer, 2019. P. 687–717.
39. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 419–428.
40. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Гринченков Г. И., Семов М. А. Ненасыщаемые кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 3. С. 5 – 25.
41. Бойков И. В., Семов М. А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия вузов. 2016. № 3. С. 3–17.
42. Солиев Ю. С. К приближенному вычислению гиперсингулярного интеграла по действительной оси // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й Междунар. Саратовской зимней школы, посвящ. 90-летию акад. П. Л. Ульянова. Саратов : Научная книга , 2018. С. 297–299.
43. Бойков И. В., Айкашев П. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 4. С. 405–423.
44. Wu J. M. ., Yu D. H. The approximate computation of hypersingular integrals on interval Chines // J. Numer. Math. Appl. 1999. Vol. 21. P. 25–33.
45. Zhang D. H., Yu X., Wu J. Superconvergence of the composite Simpson’s rule for a certain finite-part integral and its applications // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 223, iss. 2. P. 598–613.
46. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals // Discrete Continuous Dynamical Systems. 2015. Vol. 20, iss. 5. P. 1355–1375.
47. Лифанов И. К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 7. Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1985. С. 38–45.
48. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полякова Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Харьков : Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1992. Ч. 2. 145 с.
49. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
50. Gaier D. Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung. Berlin : Heidelberd : Springer, 1964. 294 p.

References

1. Ivanov V.V. *Teoriya priblizhennykh metodov i ee primenenie k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravneniy = The theory of approximate methods and its application to the numerical solution of singular integral equations.* Kiev: Naukova dumka, 1968:288. (In Russ.)
2. Boykov I.V. *Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. 1. Singulyarnye integraly = Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular integrals*. Penza: Izd-vo PGU, 2005:360. (In Russ.)
3. Boykov I.V. *Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch.2. Gipersingulyarnye integraly = Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals*. Penza: Izd-vo PGU, 2009:250. (In Russ.)

4. Khubezhty Sh.S. *Kvadraturnye formuly dlya singulyarnykh integralov i nekotorye ikh primeneniya = Quadrature formulas for singular integrals and some of their applications.* Vladikavkaz: YuMI, 2011. (In Russ.)
5. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment = Singular integral equations method and numerical experiment.* Moscow: Yanus, 1995:520. (In Russ.)
6. Vaynikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskiy L.N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya = Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*. Moscow: Yanus-K, 2001:508. (In Russ.)
7. Kutt H.R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerical Mathematics*. 1975;24:205–210.
8. Paget D.F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals. *Numerical Mathematics*. 1981;36:447–453.
9. Ioakimidis M.I. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-type integrals. *Anal. Numer. Theor. Approx*. 1983;12:131–140.
10. Bialecki B. A sine quadrature rule for Hadamard finite-part integrals. *Numerical Mathematics*. 1990;57:263–269.
11. Lutz E., Gray L.J., Ingraffea A.R. An overview of integration methods for hypersingular integrals. *Boundary Elements*. 1991;13:913–925.
12. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives. *Numer. Math*. 1987;50:273–281.
13. Monegato G. Numerical evaluation of hypersigular integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1994;50:9–31.
14. Monegato G. The numerical evaluation of 2-D Caucty principal value integral arising in boundary integral equation methods. *Math. Comp*. 1994;64:765–777.
15. Diethelm K. Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic propertics and error estimates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*.1995;65:97–114.
16. Crisculo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard-type finite integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1997;78:255–275.
17. Korsunsky A.M. Gauss-Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals. *Quart. Appl. Math*. 1998;56:461–472.
18. Boykov I.V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals. *J. Math. Math. Sci*. 2001;28:127–179.
19. Boykov I.V., Boykova A.I., Ventsel E.S. Fundamental solutions for thick sandwich plates. *Engineering Analisis and Boundary Elements*. 2004;28:1437–1444.
20. Saakyan A.V. Solution of the problem for an edge crack with a hypersingular constitutive equation by the mechanical quadrature method. *Izvestiya Natsional'noy Akademii Nauk Armenii. Mekhanika = Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia.* 2020;73(2):44–57. (In Russ.)
21. Saakyan A.V. Quadrature formula for a hypersingular integral containing the weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki = University proceedings. North Caucasian region. Natural sciences*. 2020;2:94–100. (In Russ.)
22. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven: Yale Univ. Press., 1923.
23. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa = Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type.* Moscow: Nauka, 1978:351. (In Russ.)
24. Chikin L.A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of Kazan State University.* 1953;113:10:57–105. (In Russ.)
25. Boykov I.V., Dobrynina N.F., Domnin L.N. *Priblizhennye metody vychisleniya integralov Adamara i resheniya gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniy =*

Approximate methods for calculating Hadamard integrals and solving hypersingular integral equations. Penza: Izd-vo PenzGTU, 1996:188. (In Russ.)

26. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals. *Computers and Mathematics with Applications*. 2001;41:327–352.
27. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals. *Applied Numerical*. 2009;59(6):1366–1385.
28. Kaya A.C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels. *Quatery of applied mathematics*. 1987;45(1):105–122.
29. Linkov A.M., Mogilevskaya S.G. Finite part integrals in problems of three-dimensional cracks. *Prikl. Mat. Mekh*. 1986;50:844–850.
30. Hui C.Y., Shia D. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature. *Internat. J. Numer. Methods Engrg*. 1999;44:205–214.
31. Du Q.K. Evaluations of certain hypersingular integrals on interval. *Internat. J. Numer. Methods Engrg*. 2001;51:1195–1210.
32. Choi U.J., Kim S.W., Yun B. Improvement of the asymptotic behaviour of the Euler–Maclaurin formula for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. *Internat. J. Numer. Methods Engrg*. 2004;61:496–513.
33. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Anal. Boundary Elements*. 2006;30:799–807.
34. Hildenbrand J., Kuhn G. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor. *Anal. Boundary Elements*. 1992;10:209–217.
35. Chan Y.S., Fannjiang A., Paulino G.H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41:683–720.
36. Korsunsky A.M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics. *Procceding of the Royal Society. A. Mathematical, physical and engineering sciences*. 2002;458:2721–2733.
37. Kazuhiro O., Nao-Aki N. An Iterative Algorithm of Hypersingular Integral Equations for Crack Problems N. *Key Engineering Materials. Vols*. 2008:793–796.
38. Obaiys S.J., Ibrahim. R.W., Ahmad A.F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: FundamentalReview Study. *Differential and Integral Inequalities*. Moscow: Rassias. Springer, 2019:687–717.
39. Plieva L.Yu. Interpolation-type quadrature formulas for hypersingular integrals on the interval of integration. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2016;19(4):419–428. (In Russ.)
40. Boykov I.V., Zakharova Yu.F., Grinchenkov G.I., Semov M.A. Unsaturated cubature formulas for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2013;3:5–25. (In Russ.)
41. Boykov I.V., Semov M.A. On the method for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vuzov* = University proceedings. 2016;3:3–17. (In Russ.)
42. Soliev Yu.S. Approximate calculation of the hypersingular integral along the real axis. *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 19-y Mezhdunar. Saratovskoy zimney shkoly, posvyashch. 90-letiyu akad. P. L. Ul'yanova = Modern problems of function theory and their applications: proceedings of the 19th International Saratov winter school dedicated to the 90th anniversary of academician P. L. Ulyanov.* Saratov: Nauchnaya kniga, 2018:297–299. (In Russ.)
43. Boykov I.V., Aykashev P.V., Boykova A.I. Approximate methods for solving hypersingular integral equations on the number axis. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society.* 2020;22(4):405–423. (In Russ.)
44. Wu J.M., Yu D.H. The approximate computation of hypersingular integrals on interval Chines. *J. Numer. Math. Appl*. 1999;21:25–33.

45. Zhang D.H., Yu X., Wu J. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009;223(2):598–613.
46. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals. *Discrete Continuous Dynamical Systems*. 2015;20(5):1355–1375.
47. Lifanov I.K. Numerical solution of Hilbert's singular integral equations with a strong singularity. *Optimal'nye metody vychisleniy i ikh primenenie: mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 7 = Optimal computation methods and their application: intercollegiate collected articles.* Edition 7. Penza: Penz. politekhn. in-t, 1985:38–45. (In Russ.)
48. Gandel' Yu.V., Eremenko S.V., Polyakova T.S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov = Mathematical problems of the method of discrete currents.* Kharkov: Izd-vo Khar'kov. gos. un-ta, 1992;2:145. (In Russ.)
49. Zigmund A. *Trigonometricheskie ryady = Trigonometric series.* Moscow: Mir, 1965;1:615. (In Russ.)
50. Gaier D. *Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung*. Berlin: Heidelberd: Springer, 1964:294.

Информация об авторах / Information about the authors

Илья Владимирович Бойков
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Il'ya V. Boykov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Павел Владимирович Айкашев
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Pavel V. Aykashev
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: math@pnzgu.ru

Поступила в редакцию / Received 10.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 22.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020